

## アルファ・イーティング と 静的最適解と動的最適解の差異

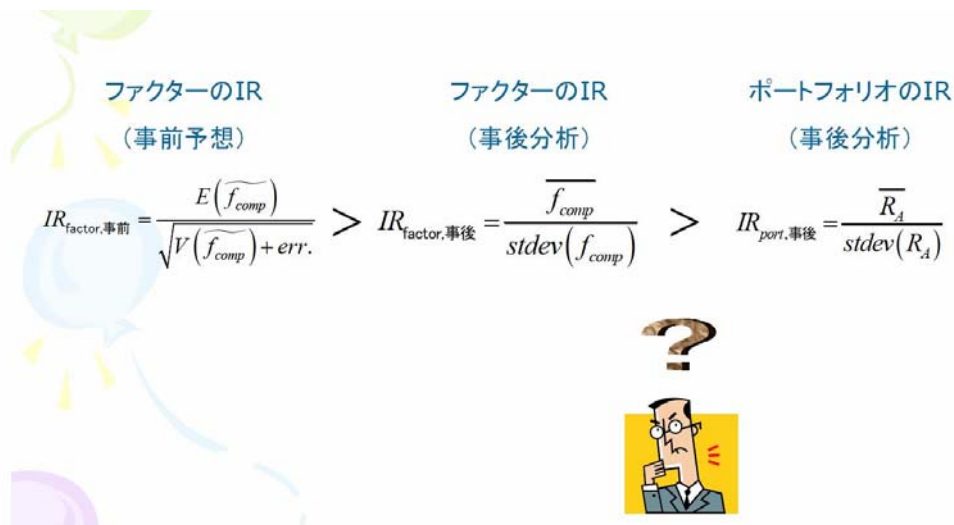
りそな銀行 アセットマネジメント部  
チーフ・クオンツ・アナリスト 南 聖治

本レポートは年金投資などにおけるクオンツ運用の専門分野でのポートフォリオ構築方法等に関するディスカッションレポートです。

### 1.はじめに

クオンツ運用では割安指標などのファクターを利用してファクターティルトポートフォリオを構築します。このようなファクターティルトポートフォリオの単位リスク当たりのリターンで定義される投資効率 (IR: インフォメーションレシオ) が投資家の見積もりよりも低減する現象が知られており、この現象はアルファ・イーティング (Lee and Dan Stefek [2008]) と呼ばれております。

図1 アルファ・イーティングとは



投資家はいくつかのファクターを組合せて合成ファクターを用いてポートフォリオを構築しますが、この合成ファクターに対するファクターリターン ( $\widetilde{f_{\text{comp}}}$ ) の事前の予想リターンと予想リスクの比率を  $IR_{\text{factor,事前}}$  とします。これを事後的に分析した場合には、ファクターリターンの IR に関する投資家の事前の予想値と現実には乖離が生じ、事後的なファクターリターンを  $IR_{\text{factor,事後}}$  とします。一般的に

過去のファクターリターンの分析をもとに合成ファクターを計算することが多いですが、このような場合には  $IR_{\text{factor, 事後}}$  は  $IR_{\text{factor, 事前}}$  よりも小さくなり、 $IR_{\text{factor, 事前}} > IR_{\text{factor, 事後}}$  となる傾向が知られております。投資家は  $IR_{\text{factor, 事前}}$  を  $IR_{\text{factor, 事後}}$  に近づけるように予測の精度の高めることが重要といえます。

一方で、将来のファクターリターンのリスクリターンを完全に投資家予測できたと仮定した場合に、投資家が構築するポートフォリオの IR を  $IR_{\text{port, 事後}}$  と表記すれば、ポートフォリオの事後的な IR はファクターリターンの事後的なリスクリターン比よりも小さくなり、 $IR_{\text{factor, 事後}} > IR_{\text{port, 事後}}$  となる傾向が知られております。

上記のように、ポートフォリオの IR が投資家の予想する IR より小さくなるというアルファ・イーティングの現象が知られておりますが、その原因として下記の(a)~(e)の要因が挙げられます。

- (a) 投資家によるファクターのリスクリターンの予測誤差
- (b) リターンを説明するファクター選択の正当性
- (c) アルファファクターとリスクファクターの整合性
- (d) ポートフォリオの制約条件
- (e) 動的最適解と静的最適解の差異

(a)と(b)はファクターティルトを行う投資家のファクターリターン予測（精度）の問題といえます。(c)は技術的な問題としてアルファモデルとリスクモデルにおけるファクターの整合性を確保することで一定レベルの対策を実施することができます<sup>ii</sup>。一方で、(d)はポートフォリオの制約条件の問題であり、制約条件の影響は変換係数(TC)を用いて近似的に計算することができます<sup>iii</sup>。また、(e)として、静的最適解によるポートフォリオは現実には実現することができないため見かけ上のアルファ・イーティングが起きます。この見かけ上のアルファ・イーティング問題を克服するために動的最適解を用いて計算を実施することが望まれます。

## 2. 数値計算例

今回のレポートでは、(e)の動的最適解と静的最適解の差異による（見かけ上の）アルファ・イーティングの度合いを計算します。

簡便的な手法として、1期間の最適化問題として静的最適解<sup>iv</sup>を算出してポートフォリオの IR を計算することがあります。この静的最適解通りにファクターティルトポートフォリオを構築した場合に

<sup>i</sup> ここでは、ファクターリターンのリスク・リターン特性（期待値と分散共分散行列）が安定で、時間によらない定数であるとの前提をおいております。この前提にもとづかない場合の議論は「株式市場における有効ファクターの循環と長期予測と短期予想の合成」（りそな銀行クオンツレポート 2011）を参照。

<sup>ii</sup> minami[2011]参照

<sup>iii</sup> minami[2011]参照

<sup>iv</sup> 簡便的な手法であり取引コストを考慮しない計算を想定します。

は、ポートフォリオの回転率が高くなることが知られております。従って、ポートフォリオの回転に伴う株式の売買コストを考慮した場合には、このような静的最適解は最適とは言えません。そのため、売買コストの影響を考慮し、多期間における最適化問題（動的最適解）を検討することが重要になります。売買コストの影響まで勘案すれば動的最適解が最適であることとなります。

一方で、簡便的にポートフォリオの IR を計算する場合には売買コストの影響を除外して計算することがありますが、このような場合にはポートフォリオの効率性を静的最適解を用いて計算しがちになります。このような静的最適解によるポートフォリオは回転が高く、実際に静的最適解通りのポートフォリオを構築することができません。一方で、取引コストを考慮した動的最適解を用いて実際にポートフォリオを構築した場合には、ポートフォリオの特性は静的最適解と若干異なることとなります。このようなケースでは、取引コストを考慮せずに計算した IR は動的最適解より静的最適解のほうが大きく見えます。しかし、実際には静的最適解の通りにポートフォリオを構築することができません。そのため、売買コストを勘案しない IR にて考えれば実際に構築できる動的最適解によるポートフォリオの IR は静的最適解よりも低くなりアルファ・イーティングが起きているように見えます。今回は、売買コストを勘案しないポートフォリオの IR を静的最適解と動的最適解で比較し、見かけ上の IR の低下現象としてのアルファ・イーティングの度合いを計算します。

ここで、市場連動性、EPR、企業規模、モメンタムの4つのファクターを取り上げ、アクティブ・リターン  $\widetilde{a}_{i,t}$  に次のような関係式があると仮定します。（ $b$  はファクターエクスポージャーを表し、 $\widetilde{f}$  はファクターリターンを表します。）

$$\widetilde{a}_{i,t} = \widetilde{f}_{BETA,t} b_{beta,i,t} + \widetilde{f}_{EPR,t} b_{EPR,i,t} + \widetilde{f}_{SIZE,t} b_{SIZE,i,t} + \widetilde{f}_{MOM,t} b_{MOM,i,t} + \varepsilon_{spc,i,t}$$

また、ファクターエクスポージャーは時間  $t$  とともに変化し、単位時間当たりのファクターエクスポージャーの変化は次のように表現できるとします。（変動係数  $\phi$  はエクスポージャーの変化の速度を示します。）

$$db_{BETA,i,t} / dt = -\phi_{BETA} b_{BETA,i,t} + \varepsilon_{beta,i,t}$$

$$db_{EPR,i,t} / dt = -\phi_{EPR} b_{EPR,i,t} + \varepsilon_{EPR,i,t}$$

$$db_{SIZE,i,t} / dt = -\phi_{SIZE} b_{SIZE,i,t} + \varepsilon_{SIZE,i,t}$$

$$db_{MOM,i,t} / dt = -\phi_{MOM} b_{MOM,i,t} + \varepsilon_{MOM,i,t}$$

このような場合に静的最適解によるポートフォリオの売買コスト考慮前の IR を  $IR_{static}$  とし、動的最適解による IR を  $IR_{dynamic}$  として、両者の IR の差を計算すれば、

$$IR_{dynamic} - IR_{static} = 0.9 - 1.3 = -0.4$$

となり、動的最適解から算出した IR は静的最適解から計算される簡便的な IR よりも減衰することが分かります。つまり、簡便的に計算する投資家による IR の予測値（ $IR_{static}$ ）に比べ実際のポートフォ

リオの IR ( $IR_{dynamic}$ ) が減少することになり、(見かけ上の) アルファ・イーティングが起きる原因となります。

### 3.まとめ

今回のレポートではクオンツ運用におけるアルファ・イーティング問題について検討いたしました。クオンツ運用を実践するにあたりアルファ・イーティングの現象をよく理解した上でポートフォリオを構築することが重要であると言えます。今後とも、よりよいポートフォリオ構築手法を検討していきたいと思えます。

(付録) 4つのファクターからなる合成アルファによるポートフォリオのコスト考慮前 IR を下式にて算出しました。

静的最適解によるポートフォリオ

$$IR_{static} = \sqrt{\mathbf{F}^T \left( \boldsymbol{\Sigma}_F + \frac{1}{n} \mathbf{C}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{F}}$$

動的最適解によるポートフォリオ (近似式)

$$IR_{dynamic} \approx \sqrt{\mathbf{F}_D^T \left( \boldsymbol{\Sigma}_F + \frac{1}{n} \mathbf{C}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{F}_D}, \quad \mathbf{F}_D \equiv (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Phi} \sqrt{\lambda/\gamma})^{-2} \mathbf{F}$$

- $\mathbf{F}$ : ファクターリターンの期待値ベクトル
- $\boldsymbol{\Sigma}_F$ : ファクターリターンの分散共分散行列
- $\boldsymbol{\Phi}$ : エクスポージャーの変動係数行列
- $\lambda$ : 売買コスト係数
- $\gamma$ : リスク回避度
- $n$ : 銘柄数
- $\mathbf{C}$ : エクスポージャーの相関情報行列

数値計算では下記のパラメーターの簡略値を想定して計算しました。

$$\sqrt{\lambda/\gamma} = 0.3$$

$$\mathbf{F} = \left( E(\widetilde{f_{beta}}) \quad E(\widetilde{f_{EPR}}) \quad E(\widetilde{f_{SIZE}}) \quad E(\widetilde{f_{MOM}}) \right)^T = (0 \quad 3 \quad 0 \quad 0)^T$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_F + \frac{1}{n} \mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_{beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{EPR} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{SIZE} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{MOM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix}$$

## 参考文献

- 南聖治, “複数のファクターを用いたアルファの合成と動的最適化による最適リバランス戦略,” リそな銀行 クオンツレポート, 2011
- 南聖治, “複数のファクターを用いたアルファの合成について,” リそな銀行 クオンツレポート, 2010
- 南聖治, “多数のアルファファクターの合成とムーア・ペンローズの一般化逆行列による多重共線性の回避,” JAFEE 夏季大会, 2011
- Jyh-Huei Lee and Dan Stefek, “Do Risk Factors Eat Alphas?,” Journal of Portfolio Management, 2008
- Minami, Seiji, Composite Factor for Long Only: Alphas, Risks and Constraints (June 1, 2011). Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1950495>
- Minami, Seiji, Composite Alpha Factor and Portfolio Rebalance on Factor Tilts (October 5, 2011). Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1963109>

Keywords: Alpha Eating, Factor Tilts, Composite Factor

- 本資料は、お客様への情報提供を目的としたものであり、特定のお取引の勧誘を目的としたものではありません。
- 本資料は、作成時点において信頼できるとされる各種データ等に基づいて作成されていますが、弊社はその正確性または完全性を保証するものではありません。
- また、本資料に記載された情報、意見および予想等は、弊社が本資料を作成した時点の判断を反映しており、今後の金融情勢、社会情勢等の変化により、予告なしに内容が変更されることがありますのであらかじめご了承下さい。
- 本資料に関わる一切の権利はリそな銀行に属し、その目的を問わず無断で引用または複製することを固くお断りします。